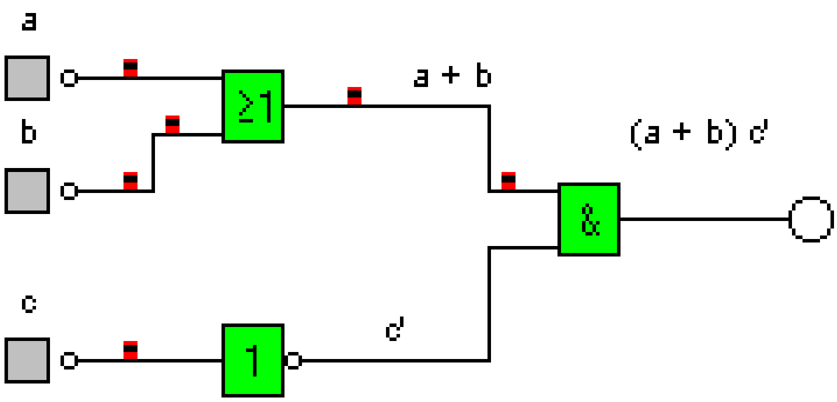
TECNOLOGÍA 4º ESO

TEMA 5:

Lógica binaria



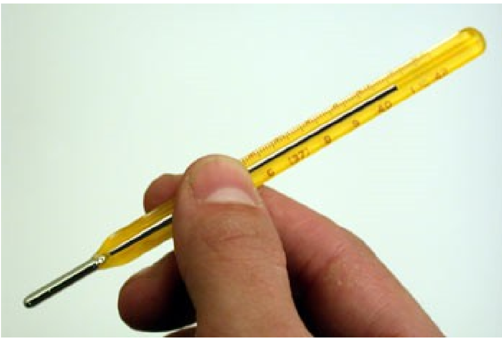
Autor: José Antonio López Álvarez

Índice de contenido

1. Señales analógicas y digitales

Cuando un equipo electrónico nos muestra una información, puede hacerlo de forma analógica o de forma digital. **Analógica** quiere decir que la información, la señal, para pasar de un valor a otro pasa por todos los valores intermedios, es continua. La señal **digital,** en cambio, va "a saltos", pasa de un valor al siguiente sin poder tomar valores intermedios.

Por ejemplo, pensemos en un termómetro de mercurio y en un termómetro digital. En el termómetro de mercurio si nuestra vista fuera lo suficientemente precisa podríamos percibir la diferencia entre una centésima o milésima y otra y medir temperaturas como 37,214 ºC. El termómetro digital, en cambio, no puede detectar ningún valor intermedio entre una décima y la siguiente.



La misma diferencia existe entre un reloj de agujas y un reloj digital.


5 09
PM

2. Código binario, decimal y hexadecimal

Seguramente habrás oído alguna vez que los ordenadores trabajan con números binarios. El **código binario** es la forma más sencilla de comunicarnos con un sistema electrónico puesto que trabaja sólo con ceros y unos: el cero quiere decir que no pasa corriente y el uno que sí pasa, y esa es una información que el circuito puede entender y transmitir. Por lo tanto si somos capaces de traducir lo que queremos que haga el sistema a ceros y unos podemos comunicarnos con él.

Estamos tan acostumbrados a trabajar con el **sistema decimal** que nos parece que es el único lógico, pero en realidad es sólo uno de los muchos posibles. El sistema decimal consiste en que los números enteros menores que diez tienen una cifra asignada:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Para el diez ya no existe una cifra, sino que lo que hacemos es volver al 0 y colocar delante un 1.

10

En el sistema binario, solamente el cero y el uno tienen asignada una cifra.

0, 1

Para el dos ya no existe cifra, por lo que tenemos que volver al 0 y colocar un 1 delante. El ordenador no puede entender el dos, pero sí puede entender que en un circuito no haya corriente (0) y en el otro sí (1).

Para el tres añadimos uno a las cifras anteriores, con lo que tendremos 11. Es decir, dos circuitos en los que hay corriente.

Para el cuatro se nos han acabado las combinaciones con dos cifras, hay que añadir una tercera (100) y así sucesivamente.

Decimal	Binario
0	0
1	1
2	10
3	11
4	100
5	101
6	110
7	111
8	1000

Para saber si un número está escrito en binario o en decimal (por ejemplo, 11 es once en decimal y tres en binario), se distingue poniendo la base como subíndice.

$11_2 = 3_{10}$

2.1. Cambio de binario a decimal

En sistema decimal, las cifras que componen un número son las cantidades que están multiplicando a las distintas potencias de diez (10, 100, 1000, 10000, etc.)

Por ejemplo, **745** = **7** · 100 + **4** · 10 + **5** · 1

El uno no deja de ser una potencia de diez, puesto que $10^0 = 1$.

En binario, las cifras que componen el número multiplican a las potencias de dos (1, 2, 4, 8, 16, ….)

Por ejemplo, $\mathbf{10110}_2 = \mathbf{1} \cdot 16 + \mathbf{0} \cdot 8 + \mathbf{1} \cdot 4 + \mathbf{1} \cdot 2 + \mathbf{0} \cdot 1 = 16 + 4 + 2 = 22_{10}$

Resulta más sencillo si lo escribimos al revés, de derecha a izquierda, $\mathbf{10110} = \mathbf{0} \cdot 1 + \mathbf{1} \cdot 2 + \mathbf{1} \cdot 4 + \mathbf{0} \cdot 8 + \mathbf{1} \cdot 16 = 2 + 4 + 16 = 22$

$\mathbf{110}_2 = \mathbf{0} \cdot 1 + \mathbf{1} \cdot 2 + \mathbf{1} \cdot 4 = 2 + 4 = 6_{10}$

$\mathbf{1001101}_2 = \mathbf{1} \cdot 1 + \mathbf{0} \cdot 2 + \mathbf{1} \cdot 4 + \mathbf{1} \cdot 8 + \mathbf{0} \cdot 16 + \mathbf{0} \cdot 32 + \mathbf{1} \cdot 64 = 1 + 4 + 8 + 64 = 77_{10}$

2.2. Cambio de decimal a binario

Para hacer la conversión a binario, hay que ir dividiendo el número decimal entre dos (no importa el resto si la división no es exacta) y anotar en una columna a la derecha un 0 si el resultado de la división es par y un 1 si es impar. La lista de ceros y unos leídos de abajo a arriba es el resultado.

Ejemplo: vamos a pasar a binario 79_{10}

79 **1** (impar). Dividimos entre dos:

39 **1** (impar). Dividimos entre dos:

19 **1** (impar). Dividimos entre dos:

9 **1** (impar). Dividimos entre dos:

4 **0** (par). Dividimos entre dos:

2 **0** (par). Dividimos entre dos:

1 **1** (impar).

Por tanto, $79_{10} = 1001111_2$

Más ejemplos:

23	**1**
11	**1**
5	**1**
2	**0**
1	**1**

$23_{10} = 10111_2$

58	**0**
29	**1**
14	**0**
7	**1**
3	**1**
1	**1**

$58_{10} = 111010_2$

2.3. Sistema hexadecimal

Otro código que se usa con cierta frecuencia es el hexadecimal, es decir, en base dieciséis. Consiste en utilizar las letras A, B, C, D, E y F para representar los números del diez al quince, mientras que para el dieciséis emplearemos el 1 y el 0.

$10_{16} = 16_{10}$

$1B_{16} = 16 + 11 = 27_{10}$

$3E_{16} = 3 \cdot 16 + 14 = 62_{10}$

La razón para el uso del sistema hexadecimal es que su conversión a binario o la conversión de binario a hexadecimal es muy simple, puesto que, al ser dieciséis igual a dos elevado a cuatro, cuatro números binarios componen un número hexadecimal.

No obstante este curso no trabajaremos en conversiones entre el hexadecimal y otros sistemas.

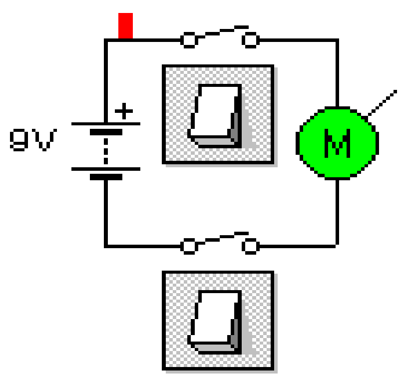
3. La tabla de la verdad

El objetivo de un sistema electrónico es producir un cierto resultado, al que llamamos **salida**, si se cumplen unas condiciones a las que llamamos **entradas**. Por ejemplo, un sistema de calefacción automático enciende los radiadores (salida) cuando la temperatura en el exterior (entrada) es baja.

Para que un sistema electrónico encienda o apague su salida en función de las condiciones de entrada que sean, tenemos que expresar tanto la acción resultante como las condiciones por medio de números binarios. Es decir, a partir de unas condiciones que pueden cumplirse (entrada = 1) o no cumplirse (entrada = 0) el sistema puede ponerse en marcha (salida = 1) o detenerse (salida = 0).

Por ejemplo, supongamos que tenemos una máquina que funciona con un motor y que puede ser peligrosa, de forma que además del interruptor para encenderla le añadimos otro interruptor de seguridad. El motor sólo debe arrancar cuando el interruptor está cerrado y además cuando el interruptor de seguridad también lo está.

Este sería el esquema eléctrico de funcionamiento de nuestra máquina:



Si queremos controlarla con un sistema electrónico, tenemos que traducir este funcionamiento a lógica binaria. A uno de los interruptores le llamamos **entrada A**, al otro interruptor **entrada B** y el motor de la máquina sería la **salida S**. Si uno de los interruptores está cerrado (A = 1) y el otro también lo está (B = 1), entonces el motor se pondrá en marcha (S = 1). En el caso de que A o B valgan 0, el motor seguirá quieto (S = 0). Vamos a expresar esto a través de una tabla:

A	**B**	**S**
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

A esta tabla, que muestra la relación entre el estado de las salidas y de las entradas de un sistema, se le llama **tabla de la verdad**.

Es importante que las filas de la tabla de la verdad estén dispuestas en el orden correcto, que es el de los números binarios:

- En primer lugar, el caso en el que A = 0 y B = 0 (00 = 0 binario).
- A continuación, el caso en el que A = 0 y B = 1 (01 = 1 binario).
- A continuación, el caso en el que A = 1 y B = 0 (10 = 2 binario).
- Por último, el caso en el que A = 1 y B = 1 (11 = 3 binario).

En el caso en el que existan 3 variables, el orden correcto será 000 (0 binario), 001 (1 binario), 010 (2), 011 (3), 100 (4), 101 (5), 110 (6) y 111 (7). Veamos un ejemplo: la tabla de la verdad para una máquina que se pone en marcha solamente en el caso de que se accionen tres pulsadores de forma simultánea.

A	B	C	S
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

4. Funciones lógicas

Necesitamos que nuestro sistema electrónico se comporte según lo establecido en la tabla de la verdad, es decir, en el ejemplo anterior del motor con dos pulsadores la salida debe activarse (S = 1) cuando las condiciones de entrada sean las que hemos determinado (en este caso A = 1 y B = 1) y debe permanecer inactiva (S = 0) en los otros casos.

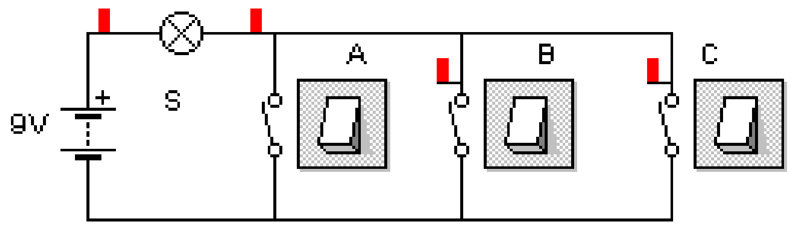
Para conseguir esta respuesta, lo que hacemos es reducir la tabla de la verdad a una sola expresión, lo que se llama la **función lógica**, y luego construiremos un circuito electrónico que relacione las entradas con la salida de acuerdo con esa función lógica.

4.1. Operaciones lógicas básicas

Las funciones lógicas pueden ser muy complejas, pero siempre van a ser una combinación de las tres **operaciones lógicas básicas.** A estas operaciones lógicas básicas y a las que derivan de ellas se las denomina de forma genérica **álgebra de Boole.**

Veamos estas tres operaciones básicas una a una:

- **Suma lógica:** la salida se activa (es un 1) cuando una cualquiera de las condiciones de entrada se activa. Solamente no se activa la salida cuando todas las entradas son 0.

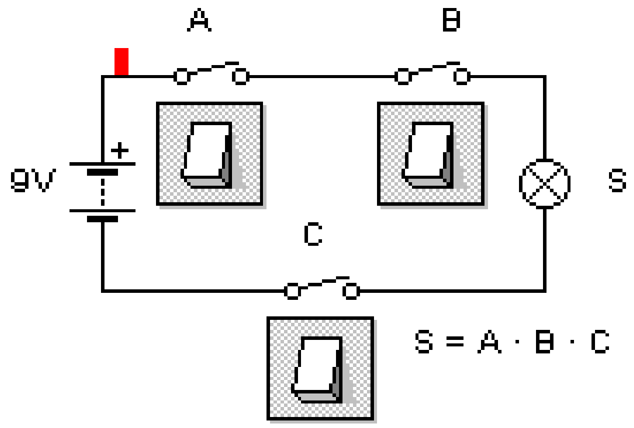


S = A + B + C

Como ejemplo este circuito, en el que la bombilla (S) se enciende al pulsar cualquiera de los interruptores. S = A + B + C

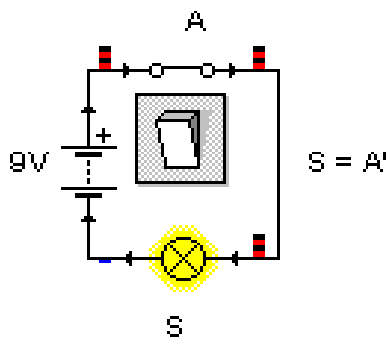
- **Producto lógico:** la salida se activa sólo cuando todas las entradas están activas. Una sola entrada a 0 implica que la salida es 0.

En este circuito, la bombilla (S) sólo se enciende si pulsamos todos los interruptores. S = A · B · C



- **Negación o inversión lógica**. Al actuar sobre la entrada (A = 1) entonces la salida se detiene (S = 0) y viceversa.

Si en este circuito actuamos sobre el interruptor (A), este se abrirá y por lo tanto la bombilla (S) se apagará. Si no actuamos sobre el interruptor (A = 0) la bombilla se mantiene encendida (S = 1). S = A'.



La inversión se suele representar también mediante una barra encima de la función en lugar de mediante el apóstrofe.

4.2. Obtención de la función lógica a partir de la tabla de la verdad

Volvamos a la tabla de verdad que teníamos en el ejemplo del apartado 3.1.

A	**B**	**S**
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Para obtener la función lógica, nos fijamos en las filas en las que S = 1. En este caso, sólo hay una, cuando A y B valen 1. Es evidente que se trata de un producto lógico.

S = A · B

Vamos con un caso más complicado:

A	**B**	**S**
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

S vale 1 cuando A y B valen 0. Eso se puede considerar como el producto lógico de A invertido y B invertido, A' · B'

Pero S también vale 1 cuando A vale 1 y B vale 0. Este caso será el producto lógico de A y B invertido, A · B'

En cualquiera de estos dos casos S vale 1, por lo tanto será la suma lógica de los dos.

S = A'B' + AB'

Por último, veamos un caso con tres entradas, A, B y C:

A	**B**	**C**	**S**
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Vemos donde se hace 1 la función de salida:

- Cuando A y B valen 0 y C vale 1, es decir, A'B'C
- Cuando A y C valen 0 y B vale 1, es decir, A'BC'
- Cuando A y C valen 1 y B vale 0, es decir, AB'C

Dado que S vale 1 en cualquiera de esos tres casos, hacemos la suma lógica de los tres:

S = A'B'C + A'BC' + AB'C

4.3. Obtención de la tabla de la verdad a partir de la función lógica

Supongamos ahora el caso contrario; no nos explican el funcionamiento de un sistema sino que nos ofrecen directamente su función lógica, que puede ser de una cierta complejidad, y nos interesa rellenar su tabla de la verdad. Veámoslo con un ejemplo:

S = a' + bc + ab'c

En primer lugar escribimos la tabla colocando las filas en el orden lógico correcto (000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111) y dejando huecos en la columna de la salida:

A	**B**	**C**	**S**
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

Tendremos que poner 1 en los siguientes casos:

- Todos aquellos en los que a valga 0 (000, 001, 010, 011).
- Aquellos en los que b y c valgan 1, sea cual sea el valor de a (011, 111). Uno de estos casos, el 011, tenía ya un 1 porque cumplía la condición anterior, a' = 1.
- Cuando a vale 1, b vale 0 y c vale 1, (101).

En el resto de los casos la función valdrá 0; rellenaremos con 0 los huecos que nos hayan quedado.

A	**B**	**C**	**S**
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0

1	1	1	1

4.4. Simplificación de la función lógica

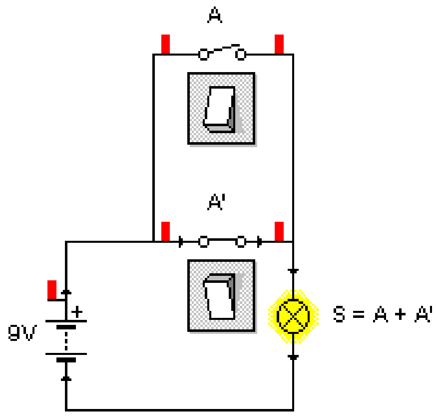
La función lógica puede ser bastante larga y compleja, por lo que interesa simplificarla lo más posible.

La simplificación se puede obtener a partir de ciertas reglas básicas o propiedades de álgebra de Boole:

- propiedad conmutativa: $a + b = b + a$ $a \cdot b = b \cdot a$
- propiedad asociativa: $a + (b + c) = (a + b) + c = a + b + c$ $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot b \cdot c$
- propiedad distributiva: $a (b + c) = ab + ac$ $a + bc = (a + b) (a + c)$
- propiedades de la inversión: $a + a' = 1$ $a \cdot a' = 0$
- idempotencia: $a + a = a$ $a \cdot a = a$
- absorción: $a + ab = a$ $a (a + b) = a$
- $a + 1 = 1$
- $a \cdot 0 = 0$

Las propiedades asociativa, distributiva y conmutativa son bastante intuitivas, puesto que existen igualmente en la suma de números naturales a la que estamos acostumbrados; lo mismo ocurre con la propiedad $a \cdot 0 = 0$. El resto de propiedades tal vez sí necesiten de una mayor explicación:

- $a + a' = 1$. Si recordamos que la suma lógica equivalía a colocar interruptores en paralelo lo entenderemos mejor:

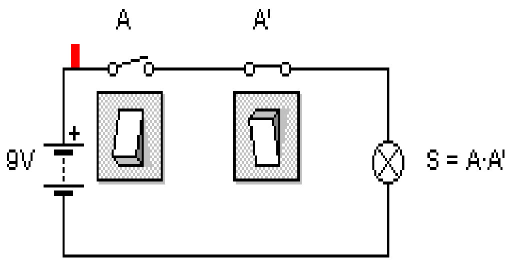


Si colocamos en paralelo dos interruptores que no son independientes entre sí sino que uno tiene siempre la posición contraria del otro, el resultado será que siempre estará encendido uno de los dos y por lo tanto la bombilla brillará en cualquier caso, es decir, la función resultante será un 1 lógico.

Otra forma de verlo es pensar que la expresión s = a + a' quiere decir que S va a estar activa, es decir, va a valer 1, cuando a valga 1 y también cuando a' valga 1. Por lo tanto estará activa siempre.

- a·a' = 0. Ahora recordemos que el producto lógico equivale a colocar interruptores en serie.

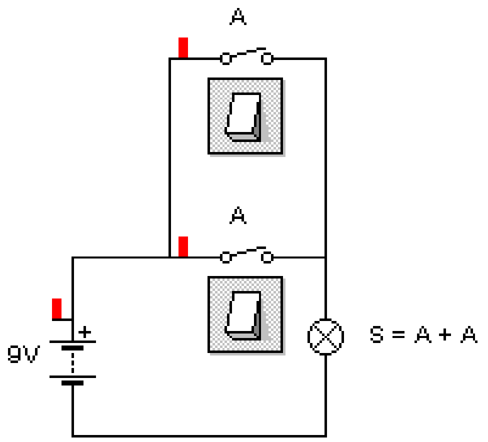
Si colocamos dos interruptores en serie y uno está apagado siempre que el otro está

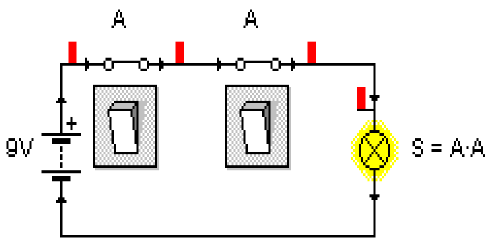


encendido, alguno de los dos estará siempre apagado abriendo el circuito, por lo tanto la bombilla de la salida nunca podrá brillar (s = 0).

Otra forma de verlo es pensar que la expresión s = a·a' quiere decir que S va a estar activa solamente cuando a y a' valgan 1 al mismo tiempo, algo que nunca puede ocurrir, puesto que si una de las dos vale 1 la otra tiene que valer 0.

- a + a = a y a · a = a



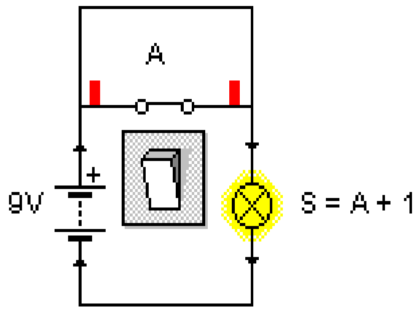


En este caso tenemos dos interruptores que se encuentran ambos siempre en la misma posición: cuando uno esté abierto el otro también lo estará y si está cerrado también se cerrará el otro; el resultado es el mismo que colocar un solo interruptor.

Si pensamos en la expresión s = a + a, tenemos una salida que se activa en el que caso en que a esté activo y también en el caso en el que a esté activo; las dos condiciones son iguales y la segunda no aporta nada respecto a la primera. Lo mismo ocurre en la expresión s = a · a.

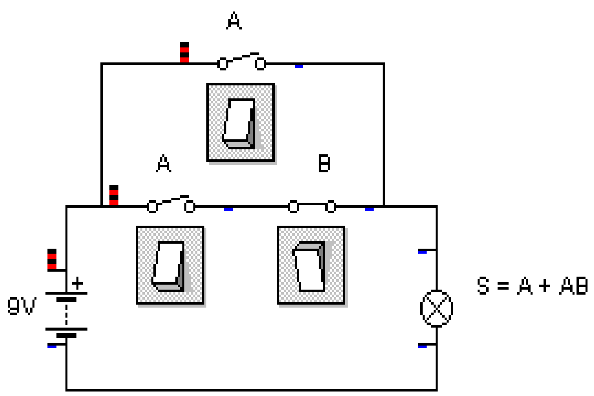
- a + 1 = 1

1 quiere decir que la salida está siempre activa, por lo tanto sumarle otra variable (sumar significa añadir otras posibilidades para que la salida esté activa) no va a aportar nada nuevo. En circuitos el 1 equivale a un cable conectado; si ponemos en paralelo un interruptor la influencia de este será nula sobre el circuito, puesto que nunca va a poder interrumpir el paso de la corriente.



- a + ab = a

Si una salida se activa siempre que a esté activado, añadirle otra condición que implica también que a esté activado, como es a·b, no añade ninguna información: si b vale 0 estaremos haciendo la suma a + 0 y el resultado será a, si b vale 1 estaremos haciendo la suma a + a, cuyo resultado también es a. Veámoslo con interruptores:

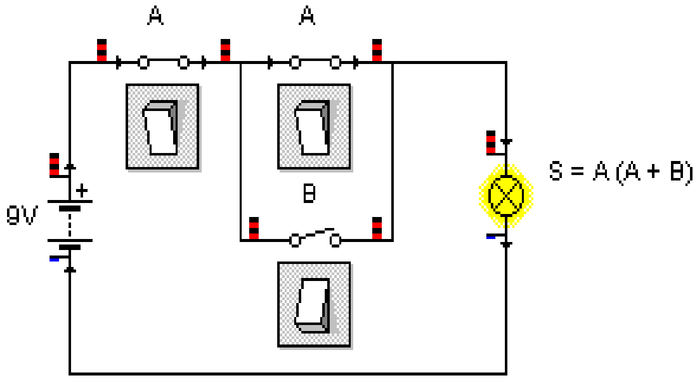


Cuando A esté abierto, la bombilla no podrá brillar con independencia del valor que tenga B; en cambio si A está cerrado, la bombilla estará siempre encendida aunque B esté cerrado.

- a (a + b) = a

Si a es 0 el producto a (a + b) valdrá 0 necesariamente, y si a es 1, a + b = 1 + b = 1, por lo que b no tendrá ninguna influencia sobre el resultado; al multiplicar a por cualquier otra expresión que contenga la variable a, el resultado será siempre a. Veámoslo con interruptores:

Si A está cerrado, es indiferente que B esté abierto o no, la bombilla recibirá siempre



corriente. En cambio si A está abierto, la bombilla nunca podrá encenderse sea cual sea la posición de B.

Ejemplos de simplificación de funciones:

1) Supongamos que tenemos la función **s = abc + a'b + ab'c + a'bc'**

Buscamos factores comunes: s = abc + ab'c + a'b + a'bc'

Propiedad distributiva: s = ac (b + b') + a'b (1 + c')

Según las propiedades que hemos visto, b + b' = 1   1 + c' = 1

s = ac + a'b

2) s = abc'd + a'bc'd + ab'c'd' + ab'

s = bc'd (a + a') + ab'(c'd' + 1) = **bc'd + ab'**

5. Criterios de evaluación

Al finalizar esta unidad deberás ser capaz de:

- Realizar conversiones entre el sistema binario y el decimal.
- Obtener la tabla de la verdad de un sistema electrónico a partir de su descripción o de su función lógica.
- Obtener la función lógica de un sistema a partir de la tabla de la verdad y simplificarla.
- Comprender y obtener el circuito eléctrico equivalente a una función lógica.